

¿Podemos aceptar la definición usual de las funciones trigonométricas?

Ignacio Tejeda

Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile

9 de septiembre de 2015

Resumen

Según diversos autores, un ángulo es un objeto geométrico formado en una superficie plana por una recta ℓ y otra recta ℓ' que la intersecta en algún punto A . Si sobre tal superficie se trazan los ejes ortogonales X, Y , de modo que X coincida con ℓ y el origen esté situado en A , se puede identificar el ángulo $\angle A$ con el punto de intersección entre la recta ℓ' y la circunferencia de centro A y radio 1, lo que permite definir el seno de $\angle A$ como la ordenada del punto con que este ángulo se identifica. Sin embargo, esta definición sólo da significado al seno del objeto geométrico $\angle A$, pero no al seno de un número real.

La deficiencia anterior se resuelve si a cada punto P de la circunferencia unitaria se le asigna la longitud $\varphi(P)$ del arco que va de $(1, 0)$ a P , pues de este modo la expresión $\sin(x)$ puede definirse como la ordenada del punto $\varphi^{-1}(x)$. Esto es intuitivamente adecuado, pero da pie a algunas interrogantes:

1. ¿Qué entendemos por longitud de un arco de circunferencia?

Para simplificar ideas consideraremos la porción de la circunferencia unitaria que reposa en el primer cuadrante, y le llamaremos \mathcal{C} . En la primera parte de este trabajo construiremos una sucesión de poligonales adecuadas para aproximar un arco \widehat{AB} de \mathcal{C} . Probaremos que la sucesión de las longitudes de estas poligonales es convergente, y definiremos la longitud de \widehat{AB} como su límite. Hemos dicho que las poligonales deben ser adecuadas porque de otro modo obtendríamos resultados no deseados. Por ejemplo, si se construye una sucesión con poligonales *escalonadas* como la de la Figura 1, la sucesión de longitudes sería constante e igual a la longitud de una poligonal formada por un único escalón, lo cual obviamente echa por la borda el propósito de aproximar el arco \widehat{AB} .

Adicionalmente, definiremos el área del sector circular determinado por A y B , y mostraremos que esta guarda una relación de $1 : 2$ con la longitud de \widehat{AB} . Esta relación será nuestra principal herramienta para responder la siguiente pregunta.

2. ¿Es φ una biyección entre \mathcal{C} y $[0, \frac{\pi}{2}]$?

Si queremos que la definición de $\sin(x)$ que dimos arriba tenga sentido para cada $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, es necesario responder lo siguiente: ¿Es cierto que para cada x existe un punto $P \in \mathcal{C}$ tal que $\varphi(P) = x$? ¿es único este P ? Si en lugar de un arco de circunferencia pensamos en la recta real, la primera propiedad se verifica de inmediato

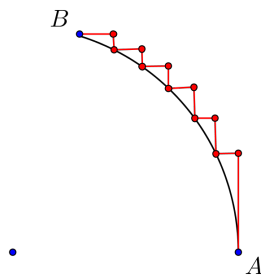


Figura 1: Una poligonal inapropiada.

gracias al axioma del supremo, sin embargo no tenemos un “axioma del supremo circular” (¡tampoco queremos definir un nuevo axioma para cada curva que podamos imaginar!). Para resolver esto asignaremos, a cada y tal que $0 \leq y \leq 1$, la longitud del arco que va de $(1,0)$ al punto en \mathcal{C} que tiene ordenada y (esto corresponde, de hecho, a la definición de $\arcsen(y)$). Probaremos que esta correspondencia es continua y monótona, y aplicaremos el *teorema del valor intermedio* (su enunciado y demostración pueden encontrarse, por ejemplo, en [1, Teo. 5.2.1, p. 177]) para concluir que es una biyección, lo que significará que φ también lo es. Esto permitirá definir $\sin(x)$ para cada $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sin ambigüedad como la ordenada del único punto $P \in \mathcal{C}$ que satisface $\varphi(P) = x$.

3. ¿Qué sucede con la longitud de un arco de circunferencia si se usa otra sucesión de poligonales para definirla?

La respuesta a la primera pregunta entrega esencialmente un ejemplo de integración. Desde este punto de vista, y considerando que nuestra demostración de la continuidad de φ depende de la relación de proporcionalidad probada en la primera parte, y por lo tanto también de la definición de la longitud de \widehat{AB} , resulta vital preguntarse qué ocurre si se elige una sucesión de poligonales diferente para definir la longitud de \widehat{AB} . En la tercera parte de este trabajo probaremos que si se elige cualquier sucesión de poligonales que cumpla una determinada condición, entonces el límite de la sucesión de longitudes asociada corresponde exactamente a la longitud definida en la primera parte.

1. Longitud de arco y área de un sector circular

Sea \mathcal{C} el cuarto de circunferencia descrito en el resumen. Dados $A, B \in \mathcal{C}$ nos proponemos dos cosas: definir la longitud del arco \widehat{AB} y definir el área del sector circular determinado por este arco, que denotaremos por $S(A, B)$. Para construir nuestras definiciones a partir de objetos más sencillos, como lo son los segmentos rectos y los polígonos, describiremos el arco a partir de poligonales y el sector circular a partir de polígonos. En la Figura 2 se muestran una poligonal y un polígono aproximando a \widehat{AB} y $S(A, B)$, respectivamente.

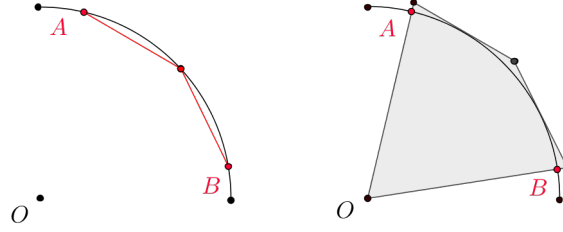


Figura 2: Aproximación por poligonales y polígonos.

1.1. Desarrollo de algunas herramientas

Dado el rol que juega el teorema del valor intermedio (TVI) en este trabajo comenzaremos por enunciarlo.

Teorema 1. ([1, Teo. 5.2.1, p. 177]) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a) \neq f(b)$ entonces dado cualquier número y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Lema 1. Dados dos puntos A, B en \mathcal{C} , existe un punto intermedio $P \in \mathcal{C}$ tal que $|AP| = |PB| \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2}}$. La circunferencia \mathcal{C} queda por debajo de la recta que pasa por P y es perpendicular a OP , donde $O = (0, 0)$.

Demostración. Todo punto en \mathcal{C} satisface su ecuación, a saber $x^2 + y^2 = 1$. Esto permite escribir $A = (\sqrt{1 - y_1^2}, y_1), B = (\sqrt{1 - y_2^2}, y_2)$ para algunos $y_1, y_2 \in (0, 1)$ fijos.¹ Para cada $y \in (0, 1)$ consideremos el punto $P_y = (\sqrt{1 - y^2}, y) \in \mathcal{C}$ y definamos la función

$$h(y) := |AP_y| - |P_y B|$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - y_1^2}\right)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - y_2^2}\right)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Esta función es continua en $(0, 1)$ por obtenerse como suma, multiplicación y composición de funciones continuas en los dominios correspondientes. Además $h(y_1) = 0 - |AB| = -(|AB| - 0) = -h(y_2)$. Por el teorema del valor intermedio debe haber algún y entre y_1 e y_2 tal que $h(y) = 0$; para este y se verifica

$$|AP_y| - |P_y B| = 0 \Leftrightarrow |AP_y| = |P_y B|.$$

Para ver que $|AP| \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2}}$ consideremos la Figura 3, donde P es tal que $|AP| = |PB|$. Aquí $|OA| = |OB|$ (ambos segmentos son radios) y el trazo OP es compartido por los triángulos $\triangle OPA$ y $\triangle OPB$, de modo que ambos deben ser congruentes por el criterio lado-lado-lado, dado lo cual se tiene $\angle APQ = \angle BPQ$. Como el segmento PQ es compartido por los triángulos $\triangle QPA$ y $\triangle QPB$, por el criterio lado-ángulo-lado podemos decir que estos últimos son congruentes, luego $|AQ| = \frac{|AB|}{2}$ y $\angle AQP = \angle BQP$, por lo tanto

$$\pi = \angle AQP + \angle BQP = 2\angle AQP \Rightarrow \angle AQP = \frac{\pi}{2}.$$

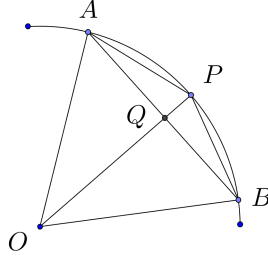


Figura 3: Punto “medio” entre A y B .

Así, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle AQP$ y notando que $|OQ| + |QP| = 1$ vemos que

$$|AP|^2 = |AQ|^2 + |QP|^2 = |AQ|^2 + (1 - |OQ|)^2 = |AQ|^2 + |OQ|^2 + 1 - 2|OQ|.$$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras sobre $\triangle OQA$ y recordando que OA es radio de la circunferencia, obtenemos

$$\begin{aligned} |AQ|^2 + |OQ|^2 + 1 - 2|OQ| &= 1 + 1 - 2|OQ| = 2(1 - |OQ|) = \frac{2(1 - |OQ|^2)}{1 + |OQ|} \\ &\leq 2(1 - |OQ|^2) = 2|AQ|^2. \end{aligned}$$

Como vimos antes, $|AQ| = \frac{|AB|}{2}$, por lo tanto hemos concluido que

$$|AP|^2 \leq 2|AQ|^2 = 2 \cdot \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 \Rightarrow |AP| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{|AB|}{2} = \frac{|AB|}{\sqrt{2}}.$$

Para probar la última afirmación del lema, sea l una recta pasando por P , perpendicular a OP (Figura 4). Esta recta divide el plano cartesiano en dos regiones R_1 y R_2 disjuntas como se muestra más abajo, donde $l \subset R_1$. Si X es cualquier punto en R_2 , entonces hay dos opciones: X está en la recta obtenida al prolongar OP ; X no está en tal recta. En el primer caso, vemos que $|OX| > |OP| = 1$, luego $X \notin \mathcal{C}$. En el otro caso consideramos OX y trazamos el segmento YX paralelo a l , con Y en la recta determinada por el segmento OP . Por el teorema de Pitágoras tendremos que

$$|OX| = \sqrt{|OY|^2 + |YX|^2} > \sqrt{1 + |YX|^2} > 1,$$

lo que indica que $X \notin \mathcal{C}$. Así, si algún punto X' está en \mathcal{C} necesariamente debe tenerse que $X' \in R_1$. □

Más adelante, en el proceso de definir las magnitudes mencionadas al comienzo, obtendremos colecciones finitas de puntos $\{P_i\}_{i=0}^n$ en \mathcal{C} y prestaremos atención a dos tipos de objetos asociados a cada una de ellas: una poligonal descrita por los puntos $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$, y una colección de triángulos $\triangle P_{i-1}OP_i$ disjuntos, como se muestra en la Figura 5.

¹La existencia de raíces cuadradas puede justificarse aplicando el TVI a la función $f(x) = x^2$.

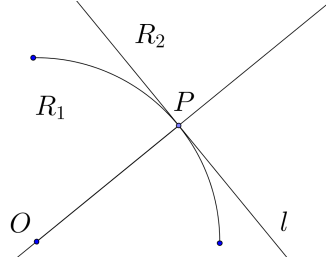


Figura 4: La circunferencia queda por debajo de la recta tangente.

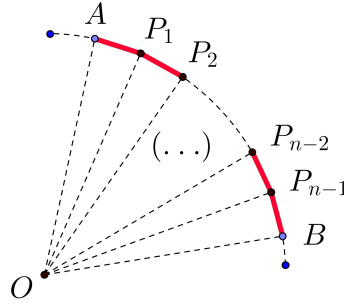


Figura 5: Una poligonal (en rojo) y los triángulos correspondientes.

El siguiente lema permitirá probar que mientras más fina sea la colección $\{P_i\}$ elegida mayor será el parecido entre las alturas en O de los triángulos $\triangle P_{i-1}OP_i$ y el radio de la circunferencia, y por lo tanto mayor será el parecido entre los polígonos, uno interior y otro exterior, que se originen a partir de $\{P_i\}$. Como veremos en la sub-sección 1.2, esta condición será de vital importancia.

Lema 2. *Dados Q_1, Q_2 sobre \mathcal{C} entre A y B , se tiene que $|Q_1Q_2| \leq |AB|$.*

Demostración. Dados $P_y, P_{y'} \in \mathcal{C}$, diremos que $P_y > P_{y'}$ si sus ordenadas y, y' son tales que $y > y'$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A > Q_1 > Q_2 > B$. Escribamos entonces $A = (\sqrt{1-y_a^2}, y_a)$, $Q_1 = (\sqrt{1-y_1^2}, y_1)$, $Q_2 = (\sqrt{1-y_2^2}, y_2)$, $B = (\sqrt{1-y_b^2}, y_b)$, para $y_a > y_1 > y_2 > y_b$. Mostraremos que $|Q_1Q_2| \leq |AB|$, viendo primero que $|Q_1Q_2| \leq |AQ_2|$ y luego que $|AQ_2| \leq |AB|$. Para lo primero calculemos $|Q_1Q_2|^2$ y probemos que $|Q_1Q_2|^2 \leq |AQ_2|^2$:

$$|Q_1Q_2|^2 = \left(\sqrt{1-y_1^2} - \sqrt{1-y_2^2} \right)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq \left(\sqrt{1-y_1^2} - \sqrt{1-y_2^2} \right)^2 + (y_a - y_2)^2. \quad (*)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} 1 > y_a > y_1 > 0 &\Rightarrow 0 < \sqrt{1-y_a^2} < \sqrt{1-y_1^2} \Rightarrow 0 > -\sqrt{1-y_a^2} > -\sqrt{1-y_1^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_a^2} > \sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2}. \end{aligned}$$

Además $\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2} > 0$ porque $y_2 < y_1$, luego

$$\left(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_a^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2}\right)^2.$$

De esto y (*) se sigue que

$$\begin{aligned} |Q_1Q_2|^2 &\leq \left(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2}\right)^2 + (y_a - y_2)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_a^2}\right)^2 + (y_a - y_2)^2 = |AQ_2|^2, \end{aligned}$$

dado lo cual resulta claro que $|Q_1Q_2| \leq |AQ_2|$.

Hemos probado en general que si $A > C > B$ son tres puntos sobre \mathcal{C} entonces $|CB| \leq |AB|$ y $|AC| \leq |AB|$. Aplicando este resultado sobre A , Q_2 y B , podemos afirmar que $|AQ_2| \leq |AB|$, lo que permite concluir lo requerido: $|Q_1Q_2| \leq |AQ_2| \leq |AB|$. \square

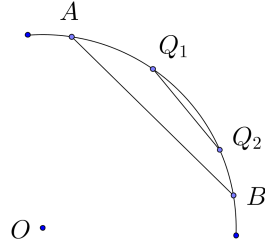


Figura 6: $|Q_1Q_2| \leq |AB|$.

Una vez que hayamos definido la longitud de \widehat{AB} y el área de $S(A, B)$, el contenido de la siguiente proposición permitirá, entre otras cosas, probar la relación de proporcionalidad que existe entre estas dos magnitudes.

Proposición 1. ■ Sean $A = P_0 > P_1 > P_2 > \dots > P_n = B$ puntos en \mathcal{C} (usando la noción de orden fijada en la demostración del Lema 2).

■ Sean A' y B' los puntos obtenidos al intersectar la recta tangente a \mathcal{C} en P (siendo P el punto del Lema 1) con las rectas OA y OB , respectivamente.

■ Para $i \in \{1, \dots, n\}$ sea T_i el triángulo $\triangle P_{i-1}OP_i$, y sea T_{ext} el triángulo $\triangle A'OB'$.

Si h_i es la altura en O de T_i y $\ell_i = |P_{i-1}P_i|$ para $1 \leq i \leq n$, $\ell^{(0)} = |AB|$, y $h^{(0)}$ es la altura en O de $\triangle AOB$, entonces

$$\ell^{(0)} \leq \sum_{i=1}^n \ell_i \leq \frac{2\text{área}(\bigcup T_i)}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} \leq \frac{2\text{área}(T_{ext})}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} = \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i}.$$

Demostración. Primera desigualdad. Cuando $n = 2$ la desigualdad vale por desigualdad triangular:

$$\ell^{(0)} = |AB| = |AP_2| \leq |AP_1| + |P_1P_2| = \ell_1 + \ell_2.$$

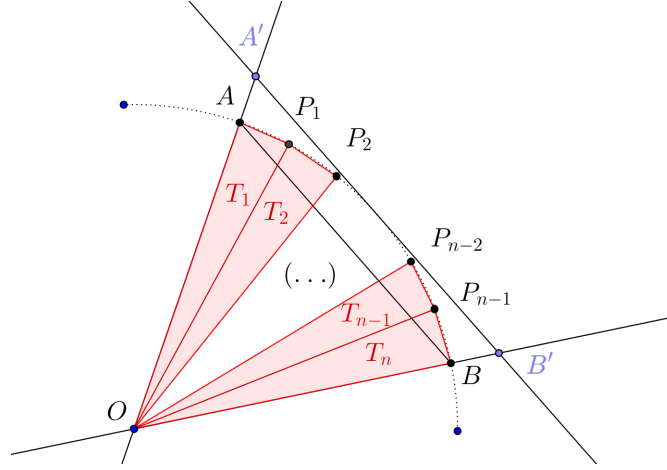


Figura 7: Elementos de la Proposición 1.

Adoptemos ahora la hipótesis de que la desigualdad vale para algún n natural, es decir, supongamos que para cualquier colección de n puntos $P_i \in \mathcal{C}$ tales que $A > P_1 > \dots > P_n = B$ se tiene $\ell^{(0)} \leq \sum_{i=1}^n \ell_i$, y consideremos $n+1$ puntos en \mathcal{C} entre A y B ; denotémoslos por Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} . Consideremos uno de los puntos no extremos, digamos, el punto Q_n , ubicado entre Q_{n-1} y Q_{n+1} . La desigualdad triangular asegura que $|Q_{n-1}Q_{n+1}| \leq |Q_{n-1}Q_n| + |Q_nQ_{n+1}|$, con lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i &= |AQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{n-1}Q_n| + |Q_nQ_{n+1}| \\ &\geq |AQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{n-1}Q_{n+1}|. \end{aligned}$$

Los n puntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_{n+1}$ están en \mathcal{C} entre A y B , por lo tanto podemos usar nuestra hipótesis para afirmar que

$$|AQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{n-1}Q_{n+1}| \geq \ell^{(0)},$$

lo que implica que $\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i \geq \ell^{(0)}$. Por el principio de inducción se sigue que la desigualdad vale para todo n natural.

Segunda desigualdad. Sea T_i el triángulo $\triangle OP_{i-1}P_i$, donde P_0 representa a A . Sean además h_i la altura en O del triángulo T_i y ℓ_i la longitud de la base $P_{i-1}P_i$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \text{área}(T_i) &= \frac{h_i \ell_i}{2} \Rightarrow 2\text{área}(T_i) = h_i \ell_i \geq \left(\min_{1 \leq j \leq n} h_j \right) \cdot \ell_i \\ \Rightarrow \ell_i &\leq \frac{2\text{área}(T_i)}{\min_{1 \leq j \leq n} h_j} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ell_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{2\text{área}(T_i)}{\min_{1 \leq j \leq n} h_j} = \frac{2}{\min_{1 \leq j \leq n} h_j} \sum_{i=1}^n \text{área}(T_i) = \frac{2}{\min_{1 \leq j \leq n} h_j} \text{área} \left(\bigcup_{i=1}^n T_i \right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se justifica con el hecho de que los T_i son disjuntos.

Tercera desigualdad. Todos los T_i están contenidos en el sector circular $S(A, B)$, el cual a su vez está contenido en T_{ext} según la última parte del Lema 1. De aquí necesariamente

$$\text{área} \left(\bigcup_{i=1}^n T_i \right) \leq \text{área}(T_{ext}) \Rightarrow \frac{2\text{área} \left(\bigcup_{i=1}^n T_i \right)}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} \leq \frac{2\text{área}(T_{ext})}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i}.$$

La igualdad. Para probar que $\frac{2\text{área}(T_{ext})}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} = \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i}$ basta usar el teorema de Thales sobre los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle A'OB'$:

$$\frac{|A'B'|}{\ell^{(0)}} = \frac{1}{h^{(0)}} \Rightarrow |A'B'| = \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)}}. \quad (1)$$

Como OP es radio y $A'B'$ es tangente a \mathcal{C} , ambos segmentos deben ser perpendiculares, gracias a lo cual podemos tomar OP como altura de T_{ext} y así calcular su área usando la ecuación (1) y el hecho de que $|OP| = 1$:

$$\text{área}(T_{ext}) = \frac{|A'B'| \cdot |OP|}{2} = \frac{|A'B'|}{2} = \frac{\ell^{(0)}}{2h^{(0)}} \Rightarrow \frac{2\text{área}(T_{ext})}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} = \frac{2 \cdot \frac{\ell^{(0)}}{2h^{(0)}}}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} = \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i}.$$

□

1.2. Definición de \widehat{AB} a partir de poligonales

Para definir con precisión la longitud del arco \widehat{AB} , necesitamos tomar una decisión respecto de la naturaleza que queremos asignarle (tal como tendremos que hacerlo más adelante al definir el área de $S(A, B)$). Siguiendo nuestra intuición, describiremos \widehat{AB} a partir de una sucesión de poligonales. Este procedimiento entrega la materia prima que usaremos también en la sección siguiente para construir polígonos adecuados al propósito de definir el área del sector circular $S(A, B)$.

Dados $A, B \in \mathcal{C}$, sea $\ell^{(0)} := |AB|$ y sea $h^{(0)}$ la altura en O del triángulo $\triangle AOB$ (como en la Proposición 1). Sea P un punto en \mathcal{C} tal que $|AP| = |PB| \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2}}$ (afirmamos que P existe y verifica esta desigualdad gracias al Lema 1). La poligonal formada al dibujar los trazos \overline{AP} y \overline{PB} consiste de dos segmentos de longitud $\ell^{(1)} := |AP| \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2}}$, y tiene una longitud total igual a $L_1 := 2\ell^{(1)}$. Tomando ahora puntos $R, S \in \mathcal{C}$ tales que $|AR| = |RP|$ y $|PS| = |SB|$, y dibujando nuevamente trazos rectos entre puntos consecutivos, obtenemos una nueva poligonal formada por cuatro segmentos de longitud $\ell^{(2)} := |AR| \leq \frac{|AP|}{\sqrt{2}} \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2^2}}$, y longitud total igual a $L_2 := 4\ell^{(2)}$. Procediendo inductivamente, en la m -ésima iteración de este proceso contamos con una colección de puntos $\{A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{2^m} = B\}$, y con ello una poligonal formada por 2^m segmentos de longitud $\ell^{(m)} \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2^m}}$, y longitud total igual a $L_m := 2^m \ell^{(m)}$. Obtenemos además 2^m triángulos $T_i = \triangle P_{i-1}OP_i$ congruentes y disjuntos entre sí; llamemos $h^{(m)}$ a la altura en O de cualquiera de ellos.

Naturalmente, nos interesamos en las poligonales formadas porque constituyen una vía razonable de acercamiento a la naturaleza del arco \widehat{AB} : decidimos que la longitud de arco de \widehat{AB} , de ser definida, debe corresponder a una magnitud íntimamente relacionada a la sucesión de longitudes $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ descrita arriba. Cabe notar además que estamos tomando como punto de partida la siguiente afirmación: “la longitud de una poligonal es igual a la suma de las longitudes de los segmentos rectos que la forman”.

Proposición 2. *La sucesión de longitudes $\{L_m\}$ ya descrita es creciente y acotada superiormente.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. En la m -ésima iteración tenemos 2^m segmentos de longitud $\ell^{(m)}$ y la misma cantidad de triángulos congruentes, con altura en O igual a $h^{(m)}$. En términos de la Proposición 1, podemos observar que $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{2^m} = \ell^{(m)}$ y que $h_1 = h_2 = \dots = h_{2^m} = h^{(m)}$. Esta última nos dice que

$$\sum_{i=1}^{2^m} \ell_i \leq \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq 2^m} h_i},$$

lo cual implica, por la observación que acabamos de hacer, que

$$2^m \ell^{(m)} \leq \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} h^{(m)}}. \quad (2)$$

Por una parte, el miembro de la izquierda corresponde a L_m , y por otra, el de la derecha es menor que $\frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}$. En efecto, el Lema 2 asegura que $\ell^{(m)} \leq \ell^{(0)}$, de modo que $\sqrt{1 - \left(\frac{\ell^{(0)}}{2}\right)^2} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2}$. Ahora, al aplicar el Teorema de Pitágoras sobre los triángulos de la Figura 8 nos damos cuenta de que la desigualdad anterior dice precisamente que $h^{(0)} \leq h^{(m)}$, lo que confirma lo que afirmamos arriba, a saber,

$$\frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} h^{(m)}} \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}.$$

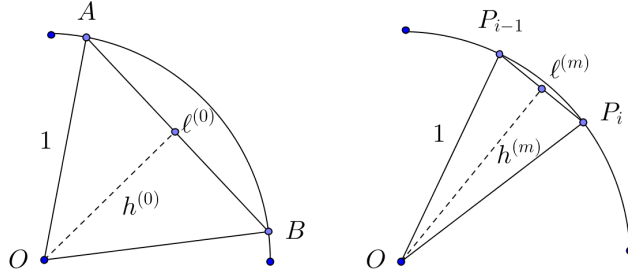


Figura 8: $(h^{(0)})^2 + \left(\frac{\ell^{(0)}}{2}\right)^2 = 1$ y $(h^{(m)})^2 + \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2 = 1$.

Al recopilar todo esto en la relación (2) concluimos finalmente que

$$L_m \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

lo que prueba que $\frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}$ es una cota superior de $\{L_m\}$.

El hecho de que $\{L_m\}$ es creciente se sigue de la Proposición 1. Tomando $\ell^{(m)}$ en el lugar de $\ell^{(0)}$, y observando que la poligonal $m+1$ -ésima se obtiene tomando un punto medio entre cada par de puntos consecutivos de la poligonal m -ésima, podemos notar lo siguiente: sobre cada segmento de longitud $\ell^{(m)}$ del paso m aparecen dos segmentos de longitud $\ell^{(m+1)}$ en el paso $m+1$. Así, la primera desigualdad de la Proposición 1 dice que

$$\ell^{(m)} \leq \sum_{i=1}^2 \ell^{(m+1)},$$

de donde se desprende (sumando a ambos lados) que

$$\begin{aligned} L_m &= \sum_{j=1}^{2^m} [\ell^{(m)}] \leq \sum_{j=1}^{2^m} \left[\sum_{i=1}^2 \ell^{(m+1)} \right] = \sum_{j=1}^{2^m} 2\ell^{(m+1)} \\ &= 2^m \cdot 2\ell^{(m+1)} = 2^{m+1}\ell^{(m+1)} = L_{m+1}. \end{aligned}$$

□

En virtud del axioma del supremo, se sigue de la proposición anterior que la sucesión $\{L_m\}$ es convergente, dado lo cual definimos la longitud del arco \widehat{AB} como

$$|\widehat{AB}| := \lim_{m \rightarrow \infty} L_m.$$

1.3. Definición del área de $S(A, B)$ a partir de poligonales

Nos enfrentamos ahora a la misión de definir el área de $S(A, B)$. Antes de continuar aclararemos que, en adelante, usaremos la notación $|\cdot|$ para representar tanto áreas como longitudes, debiendo el lector realizar la interpretación correcta dependiendo del contexto. Por ejemplo, al hablar de $|\triangle OPQ|$ nos referimos al área del triángulo con vértices O, P y Q , mientras que por $|PQ|$ nos referimos a la longitud del segmento PQ .

Aunque el objetivo de definir el área de una figura parece intuitivamente sencillo, definir rigurosamente la *medida* de un subconjunto de \mathbb{R}^2 es una tarea que requiere de un trabajo minucioso, y corresponde a un objetivo de la *teoría de la medida*. Como no es nuestro propósito entrar en los detalles que esta teoría aborda (el lector interesado puede consultar, por ejemplo, [2, capítulos 1 y 2]), sólo mencionaremos que hay ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^2 que no se pueden medir (no se les puede asignar un área), y por lo tanto necesitamos criterios que nos permitan decidir cuándo un conjunto dado es medible. De acuerdo a esto, tomaremos las siguientes premisas como punto de partida:

- Los polígonos en \mathbb{R}^2 son medibles, y el área de cualquier polígono es un real no negativo; asumiremos que el área de un triángulo cualquiera viene dada por la clásica expresión $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, y que $|\bigcup_{k=1}^n S_k| = \sum_{k=1}^n |S_k|$ cuando $\{S_k\}_{k=1}^n$ es una familia de polígonos disjuntos en \mathbb{R}^2 .
- Si un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ es tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen dos polígonos Σ y Σ' en \mathbb{R}^2 verificando

$$\Sigma \subset S \subset \Sigma' \quad \text{y} \quad |\Sigma'| - |\Sigma| < \varepsilon,$$

entonces S es medible y su área puede definirse como el ínfimo de las áreas de los polígonos que lo contienen.

De acuerdo a esto, antes de definir el área de $S(A, B)$ necesitamos probar que esta región es medible. Ahora bien, probar esto último en términos de las premisas de arriba se traduce en tomar $S = S(A, B)$ y luego hallar dos polígonos Σ y Σ' que verifiquen las hipótesis de la segunda premisa. Para lograr esto usaremos el procedimiento descrito al comienzo de esta subsección de la siguiente manera.

En la m -ésima iteración de nuestro procedimiento de obtención de puntos y poligonales, definamos Σ_m como el polígono de vértices $OP_0P_1P_2 \dots P_{2^m}$. Este está contenido en $S(A, B)$ y consiste en la unión disjunta de los triángulos T_i de la Proposición 1 para $1 \leq i \leq 2^m$, es decir, $\Sigma_m = \bigcup_{i=1}^{2^m} T_i$. Además se tiene que $|\Sigma_m| = \sum_{i=1}^{2^m} |T_i|$.

Ahora (usaremos notación nueva con el único fin de definir un polígono exterior; olvidarse de los siguientes elementos después no supondrá problemas), para cada $i \in \{1, \dots, 2^m\}$ sea M_i un punto en \mathcal{C} tal que $|P_{i-1}M_i| = |M_iP_i|$, y sea γ_i la recta tangente a \mathcal{C} en M_i . Sean ahora P'_{i-1} y P'_i los puntos de intersección de γ_i con las prolongaciones de las rectas $\overline{OP_{i-1}}$ y $\overline{OP_i}$ respectivamente.

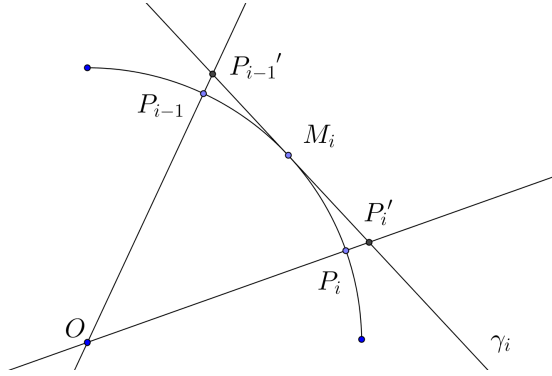


Figura 9: Vértices para un polígono exterior.

Si escribimos $\triangle P'_{i-1}OP'_i = T'_i$, entonces definimos $\Sigma'_m := \bigcup T'_i$. De manera análoga a Σ_m , el polígono Σ'_m contiene a $S(A, B)$ (el Lema 1 asegura que el arco con extremos P_{i-1} y P_i queda por debajo del segmento $\overline{P'_{i-1}P'_i}$) y además por construcción $|\Sigma'_m| = \sum_{i=1}^{2^m} |T'_i|$.

Lo primero que observamos es que $\Sigma_m \subset S(A, B) \subset \Sigma'_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir, se cumple una de las hipótesis de la segunda premisa. Ahora solamente falta hallar algún m_0 tal que $|\Sigma'_{m_0}| - |\Sigma_{m_0}| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ dado con anterioridad.

Proposición 3. Sean $\ell^{(m)}$, $\ell^{(0)}$, y $h^{(0)}$ las magnitudes descritas al comienzo de esta subsección. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2} < 1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}. \quad (4)$$

Nota: El rol del término $\frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}$ se reduce a representar una magnitud arbitrariamente pequeña; no escribimos ε por motivos casi estéticos que veremos después de la demostración.

Demostración. Gracias a las primeras reflexiones de esta subsección, sabemos que $\ell^{(m)} \leq \frac{|AB|}{\sqrt{2^m}}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $\frac{|AB|}{\sqrt{2^m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, se sigue del teorema del sandwich que $\ell^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, luego $\frac{1}{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$ gracias a la aritmética de límites. Por definición

de convergencia, dado que $\frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}$ es positivo, debe existir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2} < 1 + \frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}, \quad \forall m \geq m_0.$$

□

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea m_0 el natural de la proposición anterior. Afirmamos que $|\Sigma'_m| - |\Sigma_m| < \varepsilon$ siempre que $m \geq m_0$. En efecto, al calcular $|T_i|$ tomando la altura en O y $|T'_i|$ como al final de la demostración de la Proposición 1, vemos que

$$\begin{aligned} |\Sigma'_m| - |\Sigma_m| &= \sum_{i=1}^{2^m} |T'_i| - \sum_{i=1}^{2^m} |T_i| = \sum_{i=1}^{2^m} \frac{\ell^{(m)}}{2h^{(m)}} - \sum_{i=1}^{2^m} \frac{\ell^{(m)}h^{(m)}}{2} = \frac{2^m \ell^{(m)}}{2h^{(m)}} - \frac{2^m \ell^{(m)}h^{(m)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2^m \ell^{(m)}}_{=L_m} h^{(m)} \left[\frac{1}{(h^{(m)})^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \cdot L_m h^{(m)} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2} - 1 \right] \\ &\stackrel{\text{desigualdad (4)}}{\leq} \frac{L_m h^{(m)}}{2} \left[1 + \frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Como vimos en la desigualdad (3), $L_m \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}$, y además $h^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2}} < 1$, por

lo tanto

$$\frac{L_m h^{(m)}}{2} \left[1 + \frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}} - 1 \right] < \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2} \cdot 1 \left[\frac{2\varepsilon(h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}} \right] = \varepsilon.$$

Todo esto prueba que basta elegir cualquier m mayor que m_0 para asegurar que $|\Sigma'_m| - |\Sigma_m| < \varepsilon$, de modo que existe un par de polígonos verificando lo que queríamos (de hecho, existen infinitos de ellos). La conclusión consiguiente es que el sector $S(A, B)$ es medible, lo que nos da la licencia de definir su área como el ínfimo de las áreas de los polígonos que lo contienen:

$$|S(A, B)| := \inf_{\Sigma} \{|\Sigma| : \Sigma \text{ es un polígono que contiene a } S(A, B)\}.$$

Para concluir esta sección probaremos la relación que nos permitirá demostrar la continuidad de la función arc sen.

Teorema 2. *Dados $A, B \in \mathcal{C}$, se tiene que*

$$|\widehat{AB}| = 2|S(A, B)|.$$

Demostración. La Proposición 1 nos dice que $\sum_{i=1}^n \ell_i \leq \frac{2|\bigcup T_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} \leq \frac{2|T_{ext}|}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i} = \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i}$.

Sea m_0 el natural usado anteriormente y sea $m > m_0$ un natural cualquiera. Si consideramos las iteraciones m_0 y m de nuestro procedimiento, tendremos (entre otras cosas) dos colecciones de triángulos, una compuesta por 2^m triángulos interiores que dan forma a Σ_m , y otra compuesta por 2^{m_0} triángulos T'_j exteriores que dan forma a Σ'_{m_0} . Llamemos T_{ext} a cualquiera de los triángulos de esta última colección, y llamemos T_i al i -ésimo de los 2^{m-m_0} triángulos de la primera colección que están contenidos en T_{ext} .

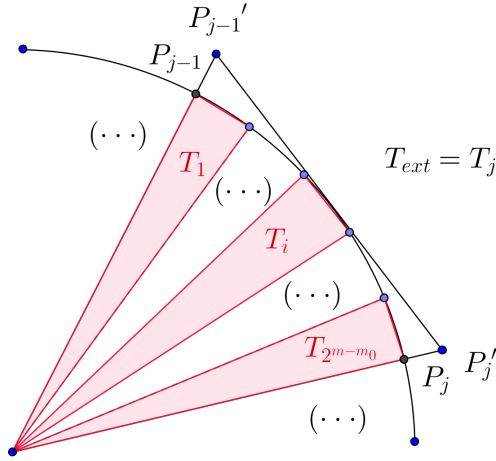


Figura 10: Triángulos interiores T_i contenidos en T_{ext} .

Como ya explicamos en la demostración de la Proposición 2, tenemos $h_1 = h_2 = \dots = h_{2^{m-m_0}} = h^{(m)} = \min_{1 \leq i \leq 2^{m-m_0}} h_i$, y $\ell_i = \ell^{(m)}$, por lo tanto la cadena de desigualdades anterior, aplicada a $n = 2^{m-m_0}$ y tomando $\ell^{(m_0)}$ y $h^{(m_0)}$ en lugar de $\ell^{(0)}$ y $h^{(0)}$, puede reescribirse como sigue:

$$2^{m-m_0} \ell^{(m)} \leq \frac{2|\bigcup T_i|}{h^{(m)}} \leq \frac{2|T_{ext}|}{h^{(m)}} = \frac{\ell^{(m_0)}}{h^{(m_0)} h^{(m)}}.$$

Sumando estas desigualdades a lo largo a todos los 2^{m_0} triángulos T'_j (y notando que todas las cantidades involucradas no dependen del índice del triángulo T'_j), obtenemos

$$\begin{aligned} 2^{m_0} \cdot 2^{m-m_0} \ell^{(m)} &\leq 2^{m_0} \cdot \frac{2|\bigcup T_i|}{h^{(m)}} \leq 2^{m_0} \cdot \frac{2|T_{ext}|}{h^{(m)}} = \frac{2^{m_0} \ell^{(m_0)}}{h^{(m_0)} h^{(m)}} \\ \Leftrightarrow L_m &\leq 2 \cdot \frac{|\Sigma_m|}{h^{(m)}} \leq 2 \cdot \frac{|\Sigma'_{m_0}|}{h^{(m)}} = \frac{L_{m_0}}{h^{(m_0)} h^{(m)}}. \end{aligned}$$

De aquí se desprenden dos cosas:

- Como la Proposición 3 asegura que $\frac{1}{h^{(m)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\ell^{(m)}}{2}\right)^2}} < \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}$, se

sigue de la primera desigualdad que

$$L_m \leq 2|\Sigma_m| \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}. \quad (5)$$

- La igualdad dice que $2|\Sigma'_{m_0}| = \frac{L_{m_0}}{h^{(m_0)}}$, y sabemos además que $\frac{1}{h^{(m_0)}} < \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}$, por lo tanto

$$2|\Sigma'_{m_0}| \leq L_{m_0} \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}. \quad (6)$$

El hecho de que $\Sigma_m \subset S(A, B)$ garantiza que para cualquier polígono Σ' conteniendo a $S(A, B)$ se tiene $|\Sigma_m| \leq |\Sigma'|$, de modo que

$$|\Sigma_m| \leq \inf \{|\Sigma'| : \Sigma' \text{ es polígono que contiene a } S(A, B)\} = |S(A, B)|,$$

lo cual puede aplicarse en la relación (5) para establecer que

$$L_m \leq 2|S(A, B)| \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}. \quad (7)$$

Por otra parte, $|S(A, B)| = \inf \{|\Sigma'| : \Sigma' \text{ es polígono que contiene a } S(A, B)\}$ es menor o igual que $|\Sigma'_{m_0}|$ porque Σ'_{m_0} contiene a $S(A, B)$. Aplicando esto en la relación (6) vemos que

$$2|S(A, B)| \leq L_{m_0} \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}}. \quad (8)$$

Uniendo lo obtenido en (7) y (8) podemos escribir lo siguiente:

$$L_m \leq 2|S(A, B)| \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}} \leq L_{m_0} \left(1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}\right).$$

Recordando que la sucesión $\{L_m\}$ es creciente y $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m = |\widehat{AB}|$, resulta claro que

$$L_{m_0} \left(1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}\right) \leq |\widehat{AB}| \left(1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}\right), \text{ lo que permite concluir que}$$

$$L_m \leq 2|S(A, B)| \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}} \leq |\widehat{AB}| \left(1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}\right).$$

Como esto vale para todo $m \geq m_0$, las desigualdades deben mantenerse en el límite cuando $m \rightarrow \infty$, es decir,

$$|\widehat{AB}| \leq 2|S(A, B)| \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}} \leq |\widehat{AB}| \left(1 + \frac{2\varepsilon (h^{(0)})^2}{\ell^{(0)}}\right).$$

Hemos llegado a una relación que sólo depende de ε (recordemos que A y B son fijos), y que es válida para cada $\varepsilon > 0$, de modo que las desigualdades perduran cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Esto último nos lleva a concluir que $|\widehat{AB}| \leq 2|S(A, B)| \leq |\widehat{AB}|$, lo cual sólo es posible si

$$|\widehat{AB}| = 2|S(A, B)|.$$

□

2. Existencia de $\text{sen}(x)$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ arbitrario

Con el resultado del teorema anterior bajo la manga nos enfocaremos ahora en lo que nos motivó a realizar este trabajo.

Definición 1. Sea \mathcal{C} el cuarto de circunferencia usado en la sección anterior, y sean $Q = (1, 0)$ e $Y = (\sqrt{1 - y^2}, y)$. Para cada $y \in [0, 1]$ definimos

$$\text{arc sen}(y) := \begin{cases} |\widehat{YQ}|, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Esta definición, a diferencia de la definición que se da para $\text{sen}(x)$, responde de manera inmediata a la interrogante que planteamos en el resumen de este trabajo: sin importar el real y entre 0 y 1 elegido, el valor $\text{arc sen}(y)$ estará siempre bien definido.

Nuestro objetivo consiste en mostrar que esta función es continua, y que por lo tanto satisface la propiedad del valor intermedio; esto último, sumado a la monotonía de arc sen (que demostraremos más adelante), permitirá garantizar la existencia de $\text{sen}(x)$ bajo su definición usual para cualquier valor de $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En concreto, queremos probar que para cualquier $y_0 \in [0, 1]$ se cumple que $\lim_{y \rightarrow y_0} |\text{arc sen}(y) - \text{arc sen}(y_0)| = 0$.

Dado que se trata de una función no algebraica, lograr el vínculo entre las magnitudes $|y - y_0|$ y $|\text{arc sen}(y) - \text{arc sen}(y_0)|$ resulta ser una tarea delicada. El teorema mostrado al final de la sección anterior juega un papel fundamental en este punto, ya que permite vincular $\text{arc sen}(y)$ con una magnitud más dócil al momento de probar continuidad. Sin hablar más, definamos $g(y) := |S(Y, Q)|$, y notemos que $\text{arc sen}(y) = 2g(y)$ para cada $y \in [0, 1]$, de modo que arc sen es una función continua si y sólo si g lo es.

Proposición 4. La función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida arriba es continua.

Demostración. Sea $y_0 \in [0, 1]$ arbitrario y sea Y_0 el punto en \mathcal{C} de coordenadas $(x_0, y_0) = (\sqrt{1 - y_0^2}, y_0)$. Para cada $y \neq y_0$, $y \in [0, 1]$, sea $Y = (x, y) = (\sqrt{1 - y^2}, y)$ y sea $Z = \gamma_1 \cap \gamma_2$, siendo γ_1 la recta tangente a \mathcal{C} en Y_0 y γ_2 la recta que pasa por \overline{OY} , como se muestra en la Figura 11.

El área del sector circular $S(Y, Y_0)$, que viene dada por $|g(y) - g(y_0)|$ (al final de la sección 3 daremos una justificación para la aditividad del área de sectores circulares), es menor o igual que el área del triángulo $\triangle ZOY_0$ para todo y (consecuencia de la definición de área que dimos y del Lema 1), de modo que intentaremos probar que $|\triangle ZOY_0| \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow y_0$ para concluir que $|g(y) - g(y_0)| \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow y_0$.

El hecho de que $|\triangle ZOY_0|$ tiende a cero se sigue del hecho de que $|\overline{ZY_0}|$ tiende a cero

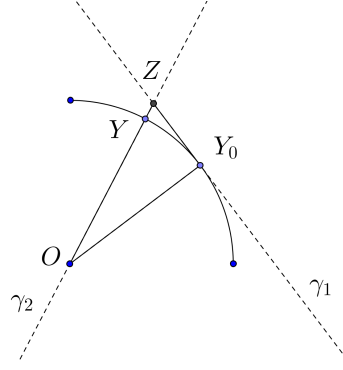


Figura 11: Continuidad de g .

cuando $y \rightarrow y_0$. En efecto, si denotamos por (u, v) al vector $\overrightarrow{Y_0Z}$, como $\overrightarrow{Y_0Z} \perp \overrightarrow{OY_0}$ el producto punto entre ambos vectores debe ser igual a cero, es decir,

$$ux_0 + vy_0 = 0. \quad (9)$$

Por otra parte, si denotamos por Y' y Z' a las proyecciones de los puntos Y y Z sobre el eje X , respectivamente, podemos aplicar el Teorema de Thales sobre los triángulos $\triangle YOY'$ y $\triangle ZOZ'$ (Figura 12) para obtener

$$\frac{x_0 + u}{x} = \frac{y_0 + v}{y}. \quad (10)$$

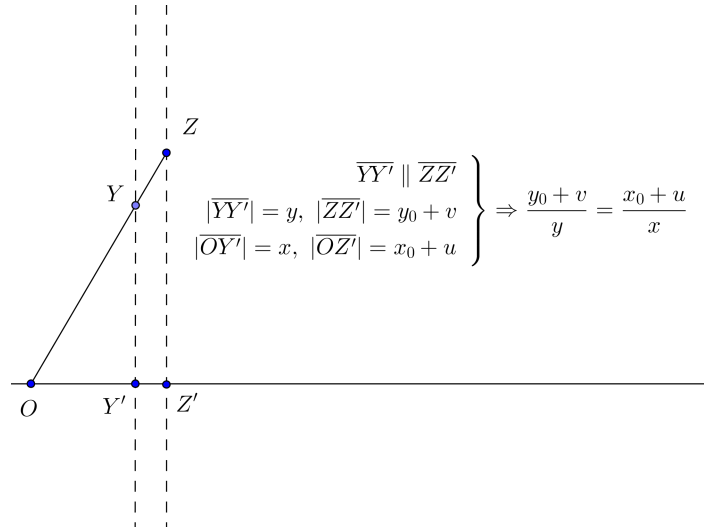


Figura 12: Teorema de Thales sobre $\triangle YOY'$ y $\triangle ZOZ'$.

Todo esto permite hallar explícitamente $\overrightarrow{Y_0Z}$, cuyas coordenadas son la solución (u, v) al sistema formado por las ecuaciones (9) y (10):

$$\overrightarrow{Y_0Z} = (u, v) = \left(\frac{y_0}{xx_0 + yy_0}(xy_0 - x_0y), \frac{-x_0}{xx_0 + yy_0}(xy_0 - x_0y) \right).$$

Como $x = \sqrt{1 - y^2} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \sqrt{1 - y_0^2} = x_0$, el resultado es el que queríamos:

$$(u, v) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \left(\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} (x_0 y_0 - x_0 y_0), \frac{-x_0}{x_0^2 + y_0^2} (x_0 y_0 - x_0 y_0) \right) = (0, 0).$$

Como dijimos en un comienzo, se verifica que $0 \leq |g(y) - g(y_0)| \leq |\triangle ZOY_0|$, lo que permite obtener la continuidad de g :

$$|\triangle ZOY_0| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

□

Observación: Si bien la Figura 11 ilustra el caso $y > y_0$, los argumentos son completamente análogos (y válidos) para $y < y_0$.

Se sigue directamente de la relación $\arcsen(y) = 2g(y)$ y de las propiedades aritméticas de los límites que la función \arcsen debe ser continua. Como dijimos en un comienzo, esto y el teorema del valor intermedio garantizan que para cada $x \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$ existe al menos un $y \in [0, 1]$ tal que $\arcsen(y) = x$. Sin embargo esto no es suficiente; si queremos definir $\sen(x)$ como el único valor de $y \in [0, 1]$ tal que $\arcsen(y) = x$, debemos probar precisamente aquello que acabamos de decir: tal valor de y es único.

Esto no es difícil de probar si observamos que, dados $a, b \in [0, 1]$, se tiene que $\arcsen(a) \neq \arcsen(b)$ si y sólo si $g(a) \neq g(b)$, de modo que basta verificar la inyectividad de g para concluir la de \arcsen . Afortunadamente, la función g es estrictamente creciente gracias a nuestras premisas acerca de la medida de polígonos.

En efecto, sean $a, b \in [0, 1]$ tales que $a > b$, y sea Σ' un polígono cualquiera conteniendo al sector $S(P(a), Q)$, para $Q = (1, 0)$. Trazando una recta por $\overline{OP(b)}$ notamos que Σ' puede escribirse como la unión disjunta de dos polígonos Σ'_1 y Σ'_2 , donde $S_1 := S(P(a), P(b)) \subset \Sigma'_1$ y $S_2 := S(P(b), Q) \subset \Sigma'_2$. En la Figura 12 mostramos un posible polígono Σ' y los dos polígonos Σ'_1 y Σ'_2 asociados.

La definición que dimos del área de un sector circular nos asegura que

$$|S_1| + |S_2| \leq |\Sigma'_1| + |\Sigma'_2| = |\Sigma'|.$$

Como Σ' es arbitrario, la desigualdad anterior se mantiene al tomar el ínfimo sobre todos los posibles valores de $|\Sigma'|$, de modo que

$$|S_1| + |S_2| \leq |S(P(a), Q)| = g(a).$$

Notando que $|S_1| + |S_2| > |S_2| = g(b)$ ($\triangle P(a)OP(b)$ está contenido en cualquier polígono que contiene a S_1 y $|P(a)OP(b)| > 0$), luego $S_1 = \inf\{|\Sigma| : S_1 \subset \Sigma, \Sigma \text{ polígono}\} > 0$

²En un sentido estricto, aún no sabemos que la longitud de arco x pertenezca al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ ya que, hasta ahora, sólo podemos describir la longitud de \mathcal{C} como el límite (apenas sabemos que existe) de una sucesión. Este asunto pasa por entender qué representa π . Históricamente, π se ha definido (en realidad, de manera equivalente a lo que describiremos) como la longitud de un *arco extendido* en una circunferencia unitaria; en un paso intelectual propio, podemos aplicar el procedimiento de la subsección 1.2 a la semicircunferencia que descansa en los cuadrantes *I* y *II*, en lugar de aplicarlo sólo a \mathcal{C} , y luego definir π como el límite de la sucesión de longitudes de las poligonales correspondientes. Como mostraremos al final del documento, las longitudes de arcos de circunferencia son aditivas, lo cual permite decir, junto con nuestra definición de π , que la longitud del arco que va de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ es exactamente igual a la mitad de la longitud del arco extendido, esto es, $\frac{\pi}{2}$.

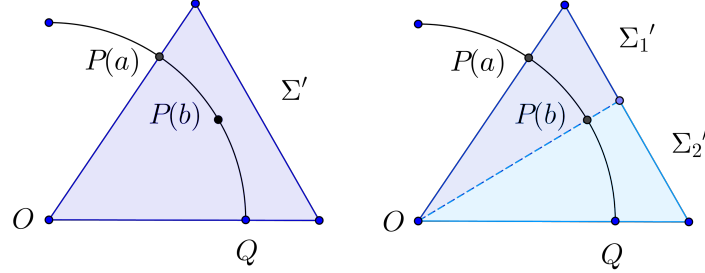


Figura 13: Un polígono exterior arbitrario.

concluimos que $g(b) < g(a)$, lo que implica la inyectividad de g , y por lo tanto también la de \arcsen . Todo esto permite decir que, dado $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, existe un único $y \in [0, 1]$ tal que $\arcsen(y) = x$, al cual podemos denotar por $\text{sen}(x)$.

3. Unicidad de la definición de longitud de arco

Para definir la longitud del arco \widehat{AB} hemos apostado nuestras fichas a la idea de que las poligonales que construimos se parecen (en un sentido intuitivo) más al arco a medida que el índice m aumenta. Razonablemente, alguien podría encontrar una sucesión distinta de poligonales que también cumpla la característica anterior (por ejemplo, dividiendo el arco \widehat{AB} en tres arcos en lugar de dos, y luego repitiendo este proceso sobre cada uno de los arcos obtenidos), y luego definir $|\widehat{AB}|$ en términos de ella, lo que nos lleva de inmediato a la siguiente duda: ¿Será posible que $|\widehat{AB}|$ tenga dos valores diferentes al definirse mediante dos sucesiones de poligonales distintas, a pesar de que ambas cumplan con parecerse más y más a \widehat{AB} ? Nos gustaría poder decir que la respuesta a esta pregunta es “no, la longitud de \widehat{AB} no depende de la sucesión de poligonales elegida”, pero para ello necesitamos aclarar algo: ¿Qué significa en concreto que una sucesión esté formada por poligonales que se parecen más y más al arco \widehat{AB} ? Decidiremos que una poligonal se parece a \widehat{AB} cuando los segmentos de ella se “confunden” con el arco, es decir, cuando las longitudes de todos ellos son suficientemente pequeñas (Lema 2 y Proposición 3). La siguiente definición nos permitirá decir esto mismo con menos palabras.

Definición 2. Sea $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ una colección finita ordenada de puntos (puntos P_i cuyas ordenadas y_i verifican $y_{i-1} > y_i$, $\forall i$) en \widehat{AB} tales que $P_0 = A$ y $P_n = B$. Diremos que esta colección es una partición de \widehat{AB} y definimos su norma por

$$\|\mathcal{P}\| := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |P_{i-1}P_i|.$$

Definición 3. Dada $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ una partición de \widehat{AB} , diremos que una poligonal formada por n segmentos está asociada a \mathcal{P} si los vértices de ella son puntos de \mathcal{P} y si además el i -ésimo segmento está dado por $\overline{P_{i-1}P_i}$.

Observación: Bajo estas definiciones, toda poligonal asociada a alguna partición de \mathcal{C} tiene sus vértices en orden decreciente respecto de sus ordenadas.

En virtud de la discusión anterior a las definiciones, consideraremos solamente sucesiones de poligonales que estén asociadas a sucesiones de particiones cuya norma tienda a cero. Es decir, si una sucesión de particiones $\{\mathcal{P}_m\}$ cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_m\| = 0, \quad (11)$$

entonces recién admitiremos a la sucesión de poligonales asociadas como un candidato para definir $|\widehat{AB}|$. El motivo de exigir esto viene de que, si $\delta > 0$ es arbitrario y $\|\mathcal{P}_m\| < \delta$, $\forall m \geq m_0$ para algún m_0 , entonces $|P_{i-1}P_i| < \delta$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ para cada $m \geq m_0$; esto no habla de otra cosa que el parecido que buscamos entre las poligonales y \widehat{AB} .

Definición 4. Sea \mathcal{P} una partición de \widehat{AB} . Si \mathcal{Q} es un conjunto finito de puntos en \widehat{AB} tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, entonces diremos que \mathcal{Q} es un refinamiento de \mathcal{P} .

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} particiones de \widehat{AB} y denotemos por $L(\mathcal{P})$ y $L(\mathcal{Q})$ a las longitudes de las poligonales asociadas. Nuestro siguiente objetivo consiste en mostrar que $|L(\mathcal{P}) - L(\mathcal{Q})|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, siempre que tanto $\|\mathcal{P}\|$ como $\|\mathcal{Q}\|$ sean suficientemente pequeños. En última instancia, aplicando este resultado a la sucesión de particiones que dan origen a las poligonales de la subsección 1.2, y a otra sucesión $\{\mathcal{Q}_m\}$ cualquiera verificando la condición (11), concluiremos que

$$L(\mathcal{Q}_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lim L_m,$$

donde $\{L_m\}$ es la sucesión usada en las páginas anteriores.

La siguiente proposición nos ayudará a lograr lo anterior usando refinamientos comunes a \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

Proposición 5. Si \mathcal{P} es una partición cualquiera de \widehat{AB} y \mathcal{P}' es un refinamiento de \mathcal{P} , entonces

$$|L(\mathcal{P}') - L(\mathcal{P})| \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2} \cdot \frac{\|\mathcal{P}\|^2}{4 - \|\mathcal{P}\|^2},$$

siendo $\ell^{(0)}$ y $h^{(0)}$ las magnitudes usadas en las secciones anteriores.

Demostración. Lo primero que debemos hacer es notar que la relación (3) es válida para la longitud de cualquier poligonal con vértices en \mathcal{C} , y no solamente para las que usamos en la subsección 1.2. En efecto, sean R y S puntos en \mathcal{C} y sean $\ell^{(0)}$ y $h^{(0)}$ las longitudes de la base y la altura en O del triángulo $\triangle ROS$. Dada cualquier poligonal de n segmentos uniendo R y S con vértices en \widehat{RS} , la Proposición 1 dice, usando la misma notación, que

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \leq \frac{\ell^{(0)}}{h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i}.$$

Como vimos al probar la Proposición 2, se cumple que $h^{(0)} \leq \min_{1 \leq i \leq n} h_i \Rightarrow \left(h^{(0)}\right)^2 \leq h^{(0)} \min_{1 \leq i \leq n} h_i$, y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2}. \quad (12)$$

Volviendo a lo principal, escribamos $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, y sean ℓ_i y h_i las magnitudes de la base y la altura en O , respectivamente, del triángulo $\triangle P_{i-1}OP_i$ (como en la Proposición 1). Como \mathcal{P}' es un refinamiento, cada punto de \mathcal{P} coincide con algún punto de \mathcal{P}' , de modo que por cada segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ de la poligonal asociada a \mathcal{P} hay uno o más segmentos de la poligonal asociada a \mathcal{P}' (para cada i , hay una porción de la poligonal proveniente de \mathcal{P}' que una P_{i-1} con P_i). Sea entonces S_i la longitud de la porción de poligonal asociada a \mathcal{P}' que le corresponde a $\overline{P_{i-1}P_i}$.

Al aplicar la relación (12) sobre esta porción obtenemos que $S_i \leq \frac{\ell_i}{h_i^2}$, lo que implica que

$$\sum_{i=1}^n S_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{h_i^2}.$$

Observando con cuidado podemos notar que el miembro de la izquierda corresponde a $L(\mathcal{P}')$. Además $\sum \ell_i \leq \sum S_i$ gracias a la primera desigualdad de la Proposición 1, por lo tanto

$$|L(\mathcal{P}') - L(\mathcal{P})| = \sum_{i=1}^n S_i - \sum_{i=1}^n \ell_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ell_i}{h_i^2} - \ell_i \right) = \sum_{i=1}^n \ell_i \left(\frac{1}{h_i^2} - 1 \right).$$

Para llegar a algo que dependa exclusivamente de $\|\mathcal{P}\|$ (después de todo, esto es lo que queremos) notemos que

$$\ell_i \leq \|\mathcal{P}\| \Rightarrow h_i^2 = 1 - \ell_i^2 \geq 1 - \left(\frac{\|\mathcal{P}\|}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{h_i^2} - 1 \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{\|\mathcal{P}\|}{2} \right)^2} - 1 = \frac{\|\mathcal{P}\|^2}{4 - \|\mathcal{P}\|^2},$$

donde la primera desigualdad es cierta por definición, y la implicancia descansa en el hecho de que $\|\mathcal{P}\| \leq \sqrt{2}$ (la partición más gruesa posible se obtiene al tomar solamente los puntos A y B , estando ambos a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$), y por lo tanto $\left(\frac{\|\mathcal{P}\|}{2} \right)^2 \leq 1$, de donde se sigue que $1 - \left(\frac{\|\mathcal{P}\|}{2} \right)^2$ es positivo.

Usando este resultado nos acercamos a lo que queremos:

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \left(\frac{1}{h_i^2} - 1 \right) \leq \sum_{i=1}^n \ell_i \cdot \frac{\|\mathcal{P}\|^2}{4 - \|\mathcal{P}\|^2} = L(\mathcal{P}) \cdot \frac{\|\mathcal{P}\|^2}{4 - \|\mathcal{P}\|^2},$$

donde podemos aplicar una vez más la relación (12) para concluir que

$$|L(\mathcal{P}') - L(\mathcal{P})| \leq \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2} \cdot \frac{\|\mathcal{P}\|^2}{4 - \|\mathcal{P}\|^2}.$$

□

El hecho de que la expresión de la derecha tiende a cero cuando $\|\mathcal{P}\|$ lo hace nos permite responder la pregunta inicial de esta sección de la siguiente manera. Sean $\{\mathcal{P}_m\}$ y $\{\mathcal{Q}_m\}$ dos sucesiones de particiones de \mathcal{C} verificando la ecuación 11. Para cada m definamos \mathcal{R}_m como la partición obtenida al unir los puntos de las dos anteriores; \mathcal{R}_m es claramente un refinamiento de ambas.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Escribiendo $f(x) = \frac{\ell^{(0)}}{(h^{(0)})^2} \cdot \frac{x^2}{4-x^2}$, la aritmética de límites indica que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $f(x) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Dado que las normas de \mathcal{P}_m y \mathcal{Q}_m tienden a cero, existe un m_0 tal que $\|\mathcal{P}_m\| < \delta$ y $\|\mathcal{Q}_m\| < \delta$ para $m \geq m_0$, por lo tanto $f(\|\mathcal{P}_m\|), f(\|\mathcal{Q}_m\|) < \frac{\varepsilon}{4}$ para estos valores de m . Usando esto y la Proposición 5 concluimos que

$$\begin{aligned} |L(\mathcal{P}_m) - L(\mathcal{Q}_m)| &= |L(\mathcal{P}_m) - L(\mathcal{R}_m) + L(\mathcal{R}_m) - L(\mathcal{Q}_m)| \\ &\leq |L(\mathcal{P}_m) - L(\mathcal{R}_m)| + |L(\mathcal{R}_m) - L(\mathcal{Q}_m)| \\ &\leq f(\|\mathcal{P}_m\|) + f(\|\mathcal{Q}_m\|) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq m_0 \end{aligned}$$

En el procedimiento de la subsección 1.2, la norma de la m -ésima partición es menor o igual que $\frac{|AB|}{\sqrt{2^m}}$ para todo m , por lo tanto tiende a cero cuando m tiende a infinito. Así, si \mathcal{P}_m es tal partición (teniéndose entonces que $L(\mathcal{P}_m) = L_m$) y $\{\mathcal{Q}_m\}$ es una sucesión cualquiera de particiones con norma tendiendo a cero, podemos concluir que $\lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{Q}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} L_m$. En efecto, por la convergencia de L_m existe N tal que $|L_m - \lim L_m| < \varepsilon/2$ cuando $m \geq N$. Además por el resultado de arriba hay algún M tal que $|L(\mathcal{Q}_m) - L_m| < \varepsilon/2$ cuando $m \geq M$, de modo que

$$|L(\mathcal{Q}_m) - \lim L_m| \leq |L(\mathcal{Q}_m) - L_m| + |L_m - \lim L_m| < \varepsilon, \quad \forall m \geq \max\{M, N\},$$

lo que prueba que la sucesión de longitudes $\{L(\mathcal{Q}_m)\}$ converge y su límite es igual a $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m$.

En resumen, hemos probado que si

1. $\{\mathcal{Q}_m\}$ es una sucesión de particiones de \widehat{AB} tal que $\|\mathcal{Q}_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$,
2. a cada partición \mathcal{Q}_m asociamos una poligonal ordenada y llamamos $L(\mathcal{Q}_m)$ a la longitud de esta,
3. definimos $|\widehat{AB}| := \lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{Q}_m)$,

entonces la magnitud $|\widehat{AB}|$ así definida es necesariamente igual a aquella definida en la sección 1.2, a saber, $\lim_{m \rightarrow \infty} L_m$. Esto muestra que la relación $|\widehat{AB}| = 2|S(A, B)|$ se verifica aún cuando $|\widehat{AB}|$ se define mediante \mathcal{Q}_m .

Con esto hemos finalizado el trabajo que nos propusimos en un comienzo, pero antes de terminar queremos hacer una pequeña reflexión acerca de algo que quedó en el tintero. En el segundo párrafo de la demostración de la Proposición 4 afirmamos que el área del sector $S(Y, Y_0)$ viene dada por $|g(y) - g(y_0)|$, es decir, asumimos que la suma de las áreas de dos sectores circulares adyacentes es igual al área del sector circular mayor formado por ambos (asumimos que se verifica la *aditividad* para las áreas de sectores circulares). Si bien este hecho podría demostrarse laboriosamente partiendo de la aditividad de las áreas de polígonos, queremos mostrar que también es una consecuencia de lo que ya probamos en esta sección.

Para esto usaremos nuevamente el hecho de que $|\widehat{AB}| = 2|S(A, B)|$, y probaremos que la aditividad se verifica para las longitudes de arcos de circunferencia. Una vez demostrado esto último, la aditividad de las áreas será una consecuencia directa de la relación de proporcionalidad anterior. Antes de continuar, una vez más, debemos adoptar un punto de partida; en este caso asumiremos que la aditividad de longitudes es válida para poligonales, es decir, supondremos que la suma de las longitudes de dos poligonales que coinciden en uno de sus extremos es igual a la longitud de la poligonal mayor formada por ambas.

Sean A, B en \mathcal{C} y sea M cualquier punto en \mathcal{C} entre A y B . Sea $\{\mathcal{P}_m\}$ una sucesión de particiones de \widehat{AB} verificando (11), de modo que $\lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_m) = |\widehat{AB}|$, y para cada m sea \mathcal{P}_m^* la partición obtenida al incluir el punto M en \mathcal{P}_m . La primera observación que debemos hacer consiste en que la sucesión $\{\mathcal{P}_m^*\}$ verifica (11), y por lo tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_m^*) = |\widehat{AB}|$. Lo siguiente consiste en notar que, para cada m , la partición \mathcal{P}_m^* puede verse como la unión de dos colecciones, una que da forma a una partición de \widehat{AM} , digamos \mathcal{Q}_m^* , y otra que forma una partición de \widehat{MB} , a la que podemos llamar \mathcal{R}_m^* . Claramente las sucesiones $\{\mathcal{Q}_m^*\}$ y $\{\mathcal{R}_m^*\}$ también verifican (11), por lo tanto las sucesiones de longitudes $\{L(\mathcal{Q}_m^*)\}$ y $\{L(\mathcal{R}_m^*)\}$ convergen a $|\widehat{AM}|$ y $|\widehat{MB}|$ respectivamente. Además nuestra premisa de arriba nos lleva directamente a la igualdad $L(\mathcal{P}_m^*) = L(\mathcal{Q}_m^*) + L(\mathcal{R}_m^*)$, válida para todo m natural, de donde se sigue que

$$|\widehat{AB}| = \lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_m^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} (L(\mathcal{Q}_m^*) + L(\mathcal{R}_m^*)) = \lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{Q}_m^*) + \lim_{m \rightarrow \infty} L(\mathcal{R}_m^*) = |\widehat{AM}| + |\widehat{MB}|.$$

Como dijimos antes, esto garantiza la aditividad de las áreas de sectores circulares. En efecto, si A, M, B son puntos de \mathcal{C} con M entre A y B , tenemos que

$$|S(A, B)| = \frac{1}{2}|\widehat{AB}| = \frac{1}{2}(|\widehat{AM}| + |\widehat{MB}|) = |S(A, M)| + |S(M, B)|.$$

4. Agradecimientos

Quiero dar las gracias a Duvan Henao, profesor de la Facultad de Matemáticas, quien fue mi guía en la escritura de este trabajo. Gracias por motivar las reflexiones iniciales sobre este problema, por darme posteriormente la privilegiada oportunidad de participar en esto, por las incontables ocasiones en que estuvo dispuesto a supervisar el progreso del texto, y por las enriquecedoras discusiones que surgieron en el camino.

También agradezco al profesor Mario Ponce por aportar con el ejemplo de la poligonal inapropiada mostrada en el resumen, y al profesor Víctor Cortés por revisar este trabajo y aportar con sugerencias aplicadas en la versión final del texto.

Referencias

- [1] JOSEPH KITCHEN, *Calculus of one variable*, Addison Wesley, 1971.
- [2] ÁLVARO COFRÉ y DUVAN HENAO, *La integral de Lebesgue en R^n* , volumen 2. Ediciones UC, Chile, 2007.